**Bài 6. (1.0 điểm)**

**a)** Tính tích phân suy rộng $I = \int_0^{+\infty} x e^{-\sqrt{2}x} dx$.

**b)** Từ kết quả câu a), hãy xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $J = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-\sqrt{2}x} dx$.

**Giải.**

a) Tính $I = \int_0^{+\infty} x e^{-\sqrt{2}x} dx = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} x e^{-\sqrt{2}x} dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-\sqrt{2}x} dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Lúc này: $I = -\dfrac{x e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} \Bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} dx$, đặt $I_1 = -\dfrac{x e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} \Bigg|_0^{+\infty}$ và $I_2 = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} dx$.

Tính $I_1$, $I_2$ :

$I_1 = -\dfrac{x e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} \Bigg|_0^{+\infty} = -\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} + \dfrac{0.e^{-\sqrt{2}.0}}{\sqrt{2}} = 0$ *vì* $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} = 0$,

$I_2 = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} dx = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} \dfrac{e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} dx = \lim_{x \to +\infty} -\dfrac{e^{-\sqrt{2}x}}{2} \Bigg|_0^{x} = \lim_{x \to +\infty} -\dfrac{e^{-\sqrt{2}x}}{2} - \lim_{x \to +\infty} -\dfrac{e^{-\sqrt{2}.0}}{2} = 0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$,

Vậy $I = I_1 + I_2 = \dfrac{1}{2}$.

b)

-------

**Bài 7. (1.0 điểm)**

**a)** Cho biết $2\int_0^1 f(x)dx + 3\int_1^4 f(x)dx = 8$ và $\int_0^1 f(3x+1)dx = 4$.

Hãy tính $\int_0^4 f(x)dx$.

**Giải.**

Ta có $\int_0^1 f(3x+1)dx = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(3x+1)d(3x+1) = 4$, từ đó ta được $\int_1^4 f(x)dx = 12$ *(1)*.

Lại có $2\int_0^1 f(x)dx + 3\int_1^4 f(x)dx = 8$ *(2)*. Lấy (2)-(1) ta được:

$2\int_0^4 f(x)dx = 2(\int_0^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx) = 8 - 12 = -4$. Vậy $\int_0^4 f(x)dx = -2$.

*** Cách khác**:

Ta có $\int_0^1 f(3x+1)dx = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(3x+1)d(3x+1) = 4$, từ đó ta được $\int_1^4 f(x)dx = 12$.

Lại có $2\int_0^1 f(x)dx + 3\int_1^4 f(x)dx = 8$ nên suy ra $\int_0^1 f(x)dx = -14$.

Do đó: $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = -14 + 12 = -2$. Kết luận: $\int_0^4 f(x)dx = -2$.

**b)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0,2]$ thỏa $3f(x) + 4f(2-x) = \sqrt{4-x^2}$ . Tính tích phân $I = \int_0^2 f'(x)dx$.

**Giải.**

Xét $3f(x) + 4f(2-x) = \sqrt{4-x^2}$ *(1)*. Thay lần lượt $x = 0$ và $x = 2$ vào *(1)* ta được:

$$3f(0) + 4f(2) = 2 \quad (a)$$
$$3f(2) + 4f(0) = 0 \quad (b)$$

Và $(a)-(b)$ cho ta $f(2) - f(0) = 2$. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0,2]$ nên $f'(x)$ khả tích và $I = \int_0^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^2 = f(2) - f(0) = 2$.

**-------**

**Bài 8. (1.0 điểm)**

Một doanh nghiệp có hàm doanh thu cận biên: $MR(Q) = 2015 - 0.75Q^2$. Hãy tìm tổng doanh thu nếu doanh nghiệp định giá sản phẩm là 415.

**Giải.**

Doanh thu:

$$R(Q) = PxQ = \int MR(Q)dQ = \int (2015 - 0.75Q^2)dQ = 2015Q - \frac{0.75}{3}Q^3$$
$$= 2015Q - 0.25Q^3 \ (do\ Q_0 = 0)$$

Khi doanh nghiệp định giá sản phẩm $P = 415$ thì: $415Q = 2015Q - 0.25Q^3 \Rightarrow Q = 80$. Tổng doanh thu lúc này là: $R(Q) = 415x80 = 32.200$.

-------